

ΟΡΙΣΜΟΣ

Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ θα λέμε ότι το A είναι μετρήσιμο κατά Lebesgue αν για κάθε $\mu \in \mathbb{N}$ το φραγμένο σύνολο $A \cap B(0, \mu)$ είναι μετρήσιμο σύνολο.

Εάν ισχύει αυτό θέτοντας $B(0, \mu) = B_\mu$ η ακολουθία $(V(A \cap B_\mu))_{\mu \in \mathbb{N}}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία πραγματικών, επομένως το όριο:

$$\lim_{\mu} V(A \cap B_\mu) \text{ υπάρχει στο } \mathbb{R}^*$$

Ορίζουμε $V(A) = \lim_{\mu} V(A \cap B_\mu)$ και αυτό λέγεται μέτρο Lebesgue ή χωρητικότητα του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^n$

• Συμβολισμός των μετρήσιμων κατά Lebesgue συνόλων $\mathcal{A}$

Η συλλογή $\mathcal{A}$ είναι μη κενή διότι εάν K είναι συμπαγές είναι μετρήσιμο και $B(0, \mu)$ (είναι ανοιχτό και φραγμένο) είναι μετρήσιμο συνεπώς $K \cap B(0, \mu)$ είναι μετρήσιμο $\forall \mu \in \mathbb{N}$

Αρα K συμπαγές $\Rightarrow K \in \mathcal{A}$

Επίσης αν G ανοιχτό το $G \cap B(0, \mu)$ $\mu \in \mathbb{N}$ είναι ανοιχτό και φραγμένο, δηλ. μετρήσιμο $\forall \mu \in \mathbb{N}$, οπότε $G \in \mathcal{A}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ τότε $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$.

Επιπλέον εάν $A_2 \subseteq A_1$ και $V(A_1) < +\infty$ τότε

$$V(A_1 \setminus A_2) = V(A_1) - V(A_2)$$

απόδειξη

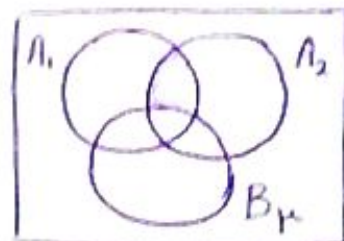
Για κάθε $\mu \in \mathbb{N}$:

$(A_1 \setminus A_2) \cap B(0, \mu) = A_1 \cap B(0, \mu) \setminus A_2 \cap B(0, \mu)$ οπότε εφόσον A_1 είναι μετρήσιμο και φραγμένο και $A_2 \cap B(0, \mu)$ είναι μετρήσιμο και φραγμένο οπότε από σχετική πρόταση (για μετρησιμ. και φραγμ.) έχουμε $A_1 \setminus B(0, \mu) \setminus A_2 \cap B(0, \mu)$ είναι μετρήσιμο και φραγμένο $\forall \mu \in \mathbb{N}$

αρα $A_1 \setminus A_2$ είναι μετρήσιμο

Επιπλέον,

$$A_1 \cap B(o, \mu) = [(A_1 \setminus A_2) \cap B(o, \mu)] \cup [A_2 \cap B(o, \mu)]$$



και $(A_1 \setminus A_2) \cap B(o, \mu)$ μετρήσιμο, φραγμένο και $A_2 \cap B(o, \mu)$ μέτρ. φραγ. και Σ ένα μέγεθος τους, οπότε από σχετική πρόταση (που αφορά ένωση Σ ένων μετρήσιμων φραγμένων συνόλων) έχω:

$$\begin{aligned} V(A_1 \cap B(o, \mu)) &= V([(A_1 \setminus A_2) \cap B(o, \mu)] \cup [A_2 \cap B(o, \mu)]) = \\ &= V((A_1 \setminus A_2) \cap B(o, \mu)) + V(A_2 \cap B(o, \mu)) \quad (*) \end{aligned}$$

$$V(A_1) = \lim_{\mu} V(A_1 \cap B(o, \mu)) < +\infty$$

παιρνώντας όρια στην (*) έχουμε:

$$V(A_1) = V(A_1 \setminus A_2) + V(A_2) \quad (**)$$

$$V(A_2) \leq V(A_1) < +\infty \quad \text{Αρα από } (**): V(A_1 \setminus A_2) = V(A_1) - V(A_2)$$

Πορισμα

Εαν $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ τότε $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$.

Επιπλέον εαν $V(A_1) < +\infty$ τότε

$$V(A_1 \cap A_2) = V(A_1) - V(A_1 \setminus A_2)$$

αποδειξη

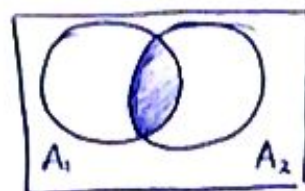
$$A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2)$$

οπότε εφόσον $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ σύμφωνα με την προηγ. πρόταση

$A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$ αρα $A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2) \in \mathcal{A}$. Εαν $V(A_1) < +\infty$

και εφόσον $A_1 \setminus A_2 \subseteq A_1$:

$$V(A_1 \cap A_2) = V(A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2)) \stackrel{\text{προηγ. πρόταση}}{=} V(A_1) - V(A_1 \setminus A_2)$$



ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ τότε $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

Επιπλέον εάν $V(A_1 \cup A_2) < +\infty$ τότε ισχύει:

$$V(A_1 \cup A_2) = V(A_1) + V(A_2) - V(A_1 \cap A_2)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $\mu \in \mathbb{N}$:

$$(A_1 \cup A_2) \cap B(0, \mu) = [A_1 \cap B(0, \mu)] \cup [(A_2 \setminus A_1) \cap B(0, \mu)] \text{ και}$$

$A_1 \cap B(0, \mu), (A_2 \setminus A_1) \cap B(0, \mu)$ μετρήσιμα και φραχμένα και ξένα μεταξύ τους, οπότε από σχετική πρόσθεση (ένωση ξένων μετρ. και φραχμ.):

$$V[(A_1 \cup A_2) \cap B(0, \mu)] = V(A_1 \cap B(0, \mu)) + V((A_2 \setminus A_1) \cap B(0, \mu)) \quad \textcircled{A}$$

$$V(A_1 \cup A_2) = \lim_{\mu} V((A_1 \cup A_2) \cap B(0, \mu)) < +\infty$$

παιρνοντας $\mu \rightarrow +\infty$ έχουμε:

$$V(A_1 \cup A_2) = V(A_1) + V(A_2 \setminus A_1) \quad \textcircled{1}$$

$$V(A_1 \cup A_2) < +\infty$$

$A_2 \subseteq A_1 \cup A_2 \Rightarrow V(A_2) < +\infty$ και από προηγ. πρόταση:

$$V(A_2 \cap A_1) = V(A_2) - V(A_2 \setminus A_1) \Rightarrow V(A_2 \setminus A_1) = V(A_2) - V(A_2 \cap A_1) \quad \textcircled{2}$$

Άρα από $\textcircled{1}$ και $\textcircled{2}$: $V(A_1 \cup A_2) = V(A_1) + V(A_2) - V(A_1 \cap A_2)$

• Έστω $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ με $A_1 = A_2 \neq \emptyset$ τότε $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$ οπότε

$$\emptyset = A_1 \setminus A_2 = A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{A}$$

Εάν έχουμε $V(A_1) < +\infty$ τότε

$$V(\emptyset) - V(A_1 \setminus A_2) = V(A_1) - V(A_1) = 0$$

Σημείωση: εάν A, B ξένα μετρήσιμα σύνολα τότε από προηγ. πρόταση: $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$ και $V(A_1 \cup A_2) = V(A) + V(B) - V(A \cap B) =$
 $= V(A) + V(B)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν $(A_n)_n$ μια ακολουθία συνόλων ανά δύο μετρήσιμων κατά Lebesgue συνόλων τότε:

$$A = \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$$

και ισχύει: $V(A) = \sum_n V(A_n)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εστω $(A_n)_n$ ακολουθία μετρήσιμων συνόλων τότε $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ και ισχύει: $V(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n V(A_n)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν $(A_n)_n$ αύξουσα ακολουθία συνόλων μετρήσιμων κατά Lebesgue και $(\bigcup_n A_n) \in \mathcal{A}$ και $V(\bigcup_n A_n) = \lim_n V(A_n)$

Παρατήρηση: $\forall m \in \mathbb{N}$, $B(0, m)$ είναι φραγμένο ανοικτό σύνολο συνεπώς είναι μετρήσιμο κατά Lebesgue. Παίρνοντας την ένωση:

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} B(0, m) \in \mathcal{A}, \text{ όμως } \mathbb{R}^n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B(0, m) \in \mathcal{A}. \text{ Άρα } \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εστω $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία συνόλων μετρήσιμων κατά Lebesgue τότε: $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$

Απόδειξη

Εφόσον $\mathbb{R}^n$ μετρήσιμο και A_k μετρήσιμο $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{R}^n \setminus A_k \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathbb{N} \text{ οπότε: } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}^n \setminus A_k) \in \mathcal{A}. \text{ Όμως}$$

$$\bigcup_k (\mathbb{R}^n \setminus A_k) \stackrel{(*)}{=} \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_k A_k$$

$$\boxed{(*) (\bigcup_{i \in I} B_i^c)^c = \bigcap_{i \in I} B_i}$$

$\mathbb{R}^n \setminus (\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}^n \setminus A_k)) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Άρα $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ είναι μετρήσιμο ως διαφορά των μετρήσιμων συνόλων $\mathbb{R}^n$ και $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}^n \setminus A_k)$ (6)

POTASH

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται μηδενικό εάν $V(A) = 0$

Άσκηση

Να δείξετε ότι ένα μονοκύβιο είναι μηδενικό σύνολο

Αν Έστω $A = \{a\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Έστω ε > 0. A είναι ελκυστικό και άπυκνο (από ουρα, μέτρο). Ορίζουμε $I = [a_1 - \frac{1}{2}\epsilon, a_1 + \frac{1}{2}\epsilon] \times [a_2 - \frac{1}{2}\epsilon, a_2 + \frac{1}{2}\epsilon] \times \dots \times [a_n - \frac{1}{2}\epsilon, a_n + \frac{1}{2}\epsilon]$. Το I είναι τεταγμένο διάστημα του $\mathbb{R}^n$.
$$V(I) = (a_1 + \frac{1}{2}\epsilon - a_1 + \frac{1}{2}\epsilon)(a_2 + \frac{1}{2}\epsilon - a_2 + \frac{1}{2}\epsilon) \cdot \dots \cdot (a_n + \frac{1}{2}\epsilon - a_n + \frac{1}{2}\epsilon)$$
$$= \underbrace{\epsilon \cdot \epsilon \cdot \dots \cdot \epsilon}_n = \epsilon^n$$

Παιχνίδιας $\epsilon \rightarrow 0$: $V(I) = 0$, όμως $A \subseteq I \stackrel{a)}{\Rightarrow} V(A) = 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ a)

Εάν A μηδενικό σύνολο τότε κάθε υποσύνολο του είναι μετρήσιμο σύνολο και μηδενικό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω A με $V(A) = 0$ και $B \subseteq A$. Εάν $\mu \in \mathbb{N}$ τότε:

$$\underline{V}(B \cap B(0, \mu)) \leq \bar{V}(A \cap B(0, \mu)) = V(A \cap B(0, \mu)) \leq \sup \{V(A \cap B(0, \mu)) : \mu \in \mathbb{N}\} =$$

$$\underbrace{(A \cap B(0, \mu))}_{\text{αυξομειωτική}} \lim_{\mu} V(A \cap B(0, \mu)) = V(A) = 0$$

Άρα $\underline{V}(B \cap B(0, \mu)) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{N}$ αλλά

$$\underline{V}(B \cap B(0, \mu)) \leq \bar{V}(B \cap B(0, \mu)) = 0 \quad \forall \mu \quad \text{φρα} \quad \underline{V}(B \cap B(0, \mu)) = \bar{V}(B \cap B(0, \mu)) =$$
$$= V(B \cap B(0, \mu)) = 0 \quad \text{λειτουργίας ορίσ.} \quad V(B) = \lim_{\mu} V(B \cap B(0, \mu)) = 0$$

Άσκηση

Να δείξετε ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι μηδενικό

Απ.

Έστω $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Είναι μετρήσιμο σύνολο (ως ελειστό και φραγμένο):

$$A = \bigcup_{i=1}^n \{a_i\} \text{ και } \{a_i\} \cap \{a_j\} = \emptyset, i \neq j, \text{ οπότε}$$

$$V(A) = V\left(\bigcup_{i=1}^n \{a_i\}\right) = \sum_{i=1}^n V(\{a_i\}) = 0$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν $(A_k)_k$ είναι μια ακολουθία μηδενικών συνόλων τότε

$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ είναι μηδενικό σύνολο.

Απόδειξη

Ένωση μετρήσιμων είναι μετρήσιμο. Επίσης:

$$0 \leq V\left(\bigcup_k A_k\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} V(A_n) = 0$$

$$V\left(\bigcup_k A_k\right) = 0$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε αριθμήσιμο σύνολο είναι σύνολο μηδενικού μετρου.

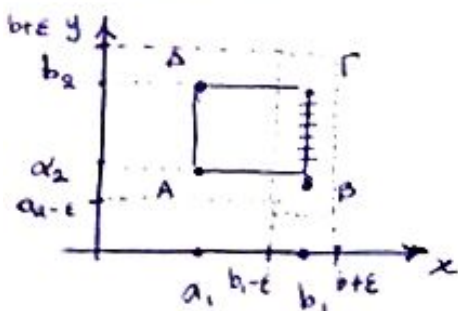
- Το σύνολο των σημείων ασυνέχειας μιας μονόκουνης συνάρτησης είναι σύνολο μηδενικού μετρου.

Άσκηση

Να δείξετε ότι το σύνολο ενός διαστήματος του $\mathbb{R}^n$ είναι μηδενικό σύνολο.

Αν

• Στον $\mathbb{R}^2$



Έστω I η πλευρά $\Gamma\Delta$. Έστω $\epsilon > 0$

τότε ορίσω $A = [b_1 - \epsilon, b_1 + \epsilon] \times [\alpha_2 - \epsilon, \alpha_2 + \epsilon]$

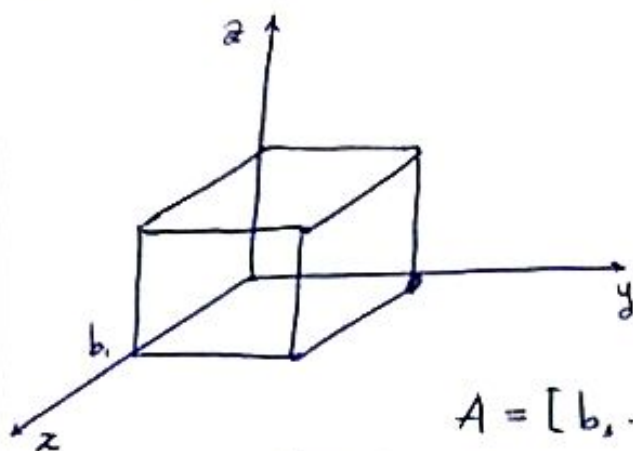
τότε $I \subseteq A$ οπότε:

$$\begin{aligned}\bar{V}(I) &\leq \bar{V}(A) = V(A) = (b_1 + \epsilon - b_1 - \epsilon) \cdot (\alpha_2 + \epsilon - \alpha_2 - \epsilon) = \\ &= 2\epsilon(b_2 - \alpha_2 + 2\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0\end{aligned}$$

παιρνοντας $\epsilon \rightarrow 0$ έχουμε:

$$\bar{V}(I) = 0 \text{ οπότε } \forall 0 \leq \underline{V}(I) \leq \bar{V}(I) = 0 \text{ άρα } \boxed{V(I) = 0}$$

• Στον $\mathbb{R}^3$



$$a = (a_1, a_2, a_3)$$

$$b = (b_1, b_2, b_3) \text{ με } a_i \leq b_i, i=1,2,3$$

$$I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\}$$

παιρνω:

$$A = [b_1 - \epsilon, b_1 + \epsilon] \times [a_2 - \epsilon, a_2 + \epsilon] \times [a_3 - \epsilon, a_3 + \epsilon]$$

$$V(A) = 2\epsilon(b_2 - a_2 + 2\epsilon)(b_3 - a_3 + 2\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\text{Άρα εφόσον } I \subseteq A \Rightarrow V(I) = V(A) = 0.$$

• Στον $\mathbb{R}^n$

$$I = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = b_1, a_i \leq x_i \leq b_i, i=2, \dots, n\}$$

Λέμε ότι μια ιδιότητα ισχύει σχεδόν παντού στο A αν ισχύει για όλα τα $x \in A \setminus E$ με $V(E) = 0$